Musterlösungen
2. Vordiplom
Mathematik: Analysis
(D-ERDW)

1. **a)** Definitionsbereich:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

Kritische Punkte:

$$\nabla f(x,y) = \left(2x \ln y, \frac{x^2-1}{y}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1,\ 2x \ln y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y) = (1,1) \ \text{ oder } \ (x,y) = (-1,1).$$

b) Hessematrix:

$$\mathrm{D}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln y & \frac{2x}{y} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2-1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Also

$$\mathrm{D}^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =: A_1$$

$$\mathrm{D}^2 f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =: A_2$$

Eigenwerte:

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4$$

$$\det(A_2 - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4$$

Also sind die Eigenwerte sowohl für A_1 als auch für A_2 gleich ± 2.
Da die Eigenwerte unterschiedliches Vorzeichen haben, sind die kritischen Punkte Sattelpunkte.

c) Die Richtungsableitung ist minimal in Gegenrichtung zum Gradienten, d.h. in Richtung $-\nabla f(2,1) = (0,-3)$. Das Minimum hat den Wert $-|\nabla f(2,1)| = -3$.
Richtungsableitung im Punkt $(2,1)$ in Richtung $(1,1)$ ist

$$\langle \nabla f(2,1), (1,1) \rangle \frac{1}{|(1,1)|} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Bitte wenden!

2. Direkte Berechnung:

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2y) - \ln(y/x) \\ x^2 y e^{\ln(y/x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\ln x \\ xy^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}\, h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{x} & 0 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

Nun verwenden wir die Kettenregel $\mathrm{D}\, h(x,y) = (\mathrm{D}\, g)\,(f(x,y)) \cdot (\mathrm{D}\, f)\,(x,y)$. Es gilt

$$\mathrm{D}\, g(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & -1 \\ e^v & ue^v \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{D}\, g)\,(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2 y} & -1 \\ \frac{y}{x} & x^2 y \cdot \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ -\frac{1}{x} & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

Zusammen erhalten wir

$$\mathrm{D}\, h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2 y} & -1 \\ \frac{y}{x} & xy^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ -\frac{1}{x} & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{x} & 0 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

3. Zerlege γ in die Teilwege α = Strecke $((-1,1),(1,1))$ und β = Kreisbogen über der Strecke $((-1,1),(1,1))$. Die Arbeit von $\vec{F}$ entlang des Weges γ ist dann gleich

$$W = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\beta \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Wir wählen Parametrisierungen

$$\alpha : t \mapsto \psi(t) := (t,t), \quad t \in [-1,1]$$

$$\beta : t \mapsto \phi(t) := \sqrt{2}(\cos t, \sin t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Wir erhalten

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (F_1(\psi(t))\psi_1'(t) + F_2(\psi(t))\psi_2'(t))\, dt = \int_{-1}^{1} (t^3 \cdot t - t^4) dt = 0$$

und

$$\int_\beta \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (F_1(\phi(t))\phi_1'(t) + F_2(\phi(t))\phi_2'(t))\, dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(4\cos^3 t \sin t \sqrt{2}(-\sin t) + (-4\cos^4 t)\sqrt{2}\cos t\right) dt =$$

$$= -4\sqrt{2} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos^3 t(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = -4\sqrt{2} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos^3 t dt =$$

$$= -4\sqrt{2} \left[\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} =$$

$$= -4\sqrt{2} \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)\right) = \frac{20}{3}.$$

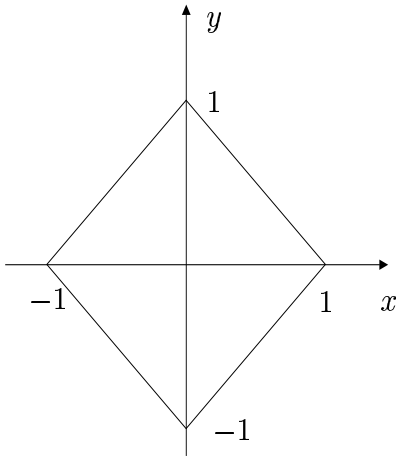
Hierbei haben wir benutzt, dass

$$\frac{d}{dt}\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right) = \cos t - \sin^2 t \cdot \cos t = \cos t(1 - \sin^2 t) = \cos^3 t.$$

Zusammen erhalten wir $W = \frac{20}{3}$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Der Bereich B ist oben skizziert.



Es gilt

$$\iint_B x^2 dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1+|x|}^{1-|x|} x^2 dy \right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 2(1-|x|)dx = 2\int_0^1 x^2 2(1-x)dx =$$

$$= 2\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

und

$$\iint_B \frac{1}{(y+2)^2} dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1+|y|}^{1-|y|} \frac{1}{(y+2)^2} dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \frac{2(1-|y|)}{(y+2)^2} dy =$$

$$= 2\int_1^3 \frac{1-|z-2|}{z^2} dz = 2\left(\int_1^2 \frac{z-1}{z^2} dz + \int_2^3 \frac{-z+3}{z^2} dz \right) =$$

$$= 2\left([\ln z]_1^2 + \left[\frac{1}{z}\right]_1^2 - [\ln z]_2^3 - \left[\frac{3}{z}\right]_2^3 \right) = 4\ln 2 - 2\ln 3.$$

Also gilt

$$\iint_B \left(x^2 + \frac{1}{(y+2)^2} \right) dxdy = \frac{1}{3} + 4\ln 2 - 2\ln 3.$$

5. **a)** Es gilt

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist F wirbelfrei. Da der Definitionsbereich von F einfach zusammenhängend ist und $\operatorname{rot} F = 0$, ist F konservativ, d.h. die Arbeit von F längs des geschlossenen Weges ∂D ist gleich 0.

b) Nach dem Integralsatz von Gauss gilt für den Fluss durch das Tetraeder T

$$\int_{\partial T} \vec{F} d\vec{S} = \int_T \operatorname{div} \vec{F} dxdydz = \int_T 3 dxdydz = 3\operatorname{Vol}(T).$$

T ist eine Pyramide mit dem Dreieck $((0,0,0),(1,1,0),(0,1,0))$ als Grundfläche und dem Punkt $(0,1,1)$ als Spitze. Die Grundlfläche hat Inhalt $\frac{1}{2}$, also ist

$$\operatorname{Vol}(T) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}.$$

Bitte wenden!

Also gilt für den Fluss durch T

$$\Phi_T = 3\,\mathrm{Vol}(T) = \frac{1}{2}.$$

Der Fluss durch das Dreieck $D_1 = ((0,0,0),(1,1,0),(0,1,0))$ (Orientierung: von T nach aussen) ist

$$\Phi_{D_1} = \int_{D_1} F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dxdy = 0.$$

Der Fluss durch das Dreieck $D_2 = ((0,0,0),(0,1,0),(0,1,1))$ (Orientierung: von T nach aussen) ist

$$\Phi_{D_2} = \int_{D_2} F \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dydz = \int_{D_2} (-y) dydz = \int_0^1 \left(\int_0^y (-y) dz \right) dy = -\int_0^1 y^2 dy = -\frac{1}{3}.$$

Der Fluss durch das Dreieck $D_3 = ((0,1,0),(1,1,0),(0,1,1))$ (Orientierung: von T nach aussen) ist

$$\Phi_{D_3} = \int_{D_3} F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dxdz = \int_{D_3} x dxdz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x dz \right) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}.$$

Zusammen erhalten wir für den Fluss durch D

$$\Phi_D = \Phi_T - \Phi_{D_1} - \Phi_{D_2} - \Phi_{D_3} = \frac{2}{3}.$$